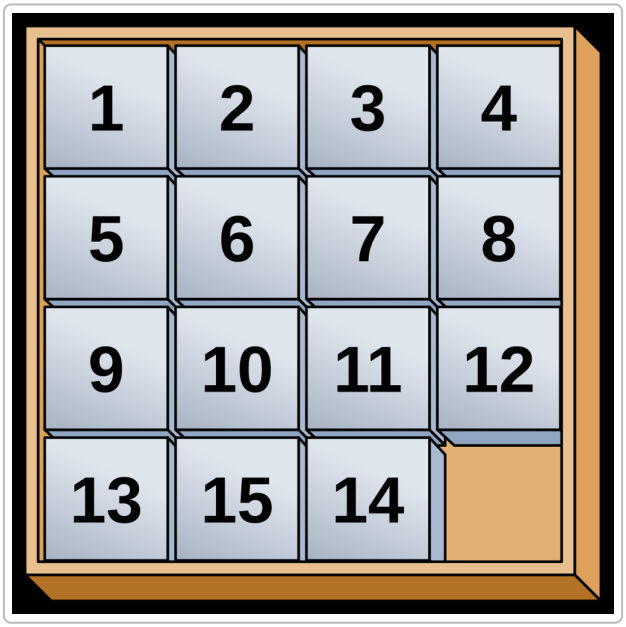
ChatGPT

Séance : Introduction au groupe alterné via le Taquin de Sam Loyd

Introduction (Contexte et motivation)



Pour introduire la notion de **groupe alterné** de manière concrète et motivante, on propose aux étudiants un célèbre casse-tête : le *Taquin de Sam Loyd*. Ce puzzle, créé vers 1870, consiste à ranger 15 tuiles numérotées de 1 à 15 sur un plateau 4×4 en faisant coulisser les pièces dans la case vide [1]. Sam Loyd avait même offert 1 000 $ à quiconque réussirait un défi apparemment simple : remettre en ordre un taquin dont seules les tuiles 14 et 15 sont inversées par rapport à la configuration finale [1]. Aucune récompense n'a jamais été réclamée, ce qui intrigue et suscite la curiosité des étudiants. *Pourquoi personne n'a pu résoudre ce défi ?* La clé de l'énigme réside dans une propriété mathématique fondamentale des **permutations** : toutes les configurations du taquin ne sont pas réalisables, seules environ la moitié le sont [2]. Cette séance de deux heures amènera progressivement les étudiants à découvrir cet invariant caché (la **parité** d'une permutation) et à identifier le **groupe alterné** A_n comme structure sous-jacente aux déplacements du taquin [3]. L'introduction capte l'attention en présentant le jeu et le défi de Loyd, posant la problématique qui guidera toute la séance : *quels déplacements du taquin sont possibles, et pourquoi certaines configurations sont-elles impossibles à atteindre ?*

Phase 1 : Rappel (non obligatoire)

Dans cette première phase (facultative selon les prérequis), l'enseignant s'assure que les notions de base nécessaires sont fraîches à l'esprit des étudiants. Il peut rappeler brièvement la définition d'une **permutation** et la façon de la noter, ainsi que la notion de **transposition** (échange de deux éléments) [4] [5]. Si le concept de **parité d'une permutation** a déjà été abordé (nombre pair ou impair de transpositions dans sa décomposition), on le rappellera également. Par exemple, on peut évoquer que toute permutation peut se décomposer en transpositions et que ce nombre de transpositions est soit toujours pair, soit toujours impair, quelle que soit la façon de la décomposer [5]. On souligne qu'une

permutation est dite *paire* si elle se décompose en un nombre pair de transpositions, *impaire* sinon [5]. Ces rappels préparent le terrain pour l'étude du taquin en garantissant que les étudiants disposent du bagage notionnel adéquat. L'enseignant peut aussi rappeler rapidement le principe du taquin pour ceux qui ne le connaîtraient pas, mais sans dévoiler l'aspect « invariant de parité » qui sera découvert pendant la séance. *(Si les étudiants sont déjà à l'aise avec ces notions, cette phase pourra être écourtée voire omise.)*

Phase 2 : Présentation et appropriation de la situation-problème

L'enseignant présente ensuite la **situation-problème** : il s'agit d'explorer le jeu du taquin afin d'introduire la notion de groupe alterné. Concrètement, chaque étudiant (ou chaque petit groupe) reçoit une fiche papier représentant un taquin 4×4 avec des cases numérotées de 1 à 15 et une case vide. La configuration initiale proposée peut être, par exemple, celle du défi de Sam Loyd (les carreaux 14 et 15 inversés, case vide en bas à droite) ou toute autre configuration intéressante. L'enseignant décrit clairement les **règles du jeu** : *« Vous pouvez déplacer une tuile adjacente dans la case vide en la faisant glisser. Le but est de parvenir à l'état final ordonné 1-2-3-…-15 (case vide en dernière position). »* Il est important de s'assurer que tout le monde a bien compris la consigne et la manipulation : l'enseignant peut par exemple démontrer un mouvement au tableau avec un taquin aimanté ou dessiné, ou demander à un étudiant de simuler un glissement pour vérifier la compréhension.

Une **introduction motivante** est intégrée à cette phase : l'enseignant raconte l'anecdote de Sam Loyd pour piquer la curiosité (*« Loyd a rendu le monde fou avec ce puzzle et son défi non relevé »* [1]) et lance le problème ouvert : *« Pensez-vous que toutes les positions du taquin sont solubles ? Comment expliquer qu'en inversant juste deux tuiles, on puisse bloquer le casse-tête ? »* Les étudiants sont ainsi engagés dans la tâche, conscients du but à atteindre (résoudre ou comprendre l'impossibilité de résolution de certaines configurations). Pendant cette phase, l'enseignant distribue le matériel (grille du taquin, éventuellement des tuiles mobiles en papier) et encourage les étudiants à manipuler le puzzle pour se l'approprier. **Objectif de la phase :** que les étudiants comprennent le problème posé et aient envie de le résoudre, tout en s'appropriant les règles du taquin et en formulant éventuellement des premières conjectures spontanées (*« il doit y avoir quelque chose qui coince quand on échange juste deux pièces… »*).

Phase 3 : Recherche (action et formulation, travail individuel ou en groupe)

Place à la **recherche active** : les étudiants, seuls ou en petits groupes, tentent de résoudre la situation-problème par eux-mêmes. Concrètement, deux activités complémentaires peuvent être suggérées :

- **Tentative de résolution** : *« Essayez de remettre le taquin en ordre pour la configuration proposée. »* Les étudiants manipulent les tuiles sur leur grille papier, enchaînent les glissements pour atteindre la configuration finale. S'ils travaillent sur le défi de Loyd (14 et 15 inversés), ils constateront empiriquement qu'ils tournent en rond : malgré de multiples essais, l'état final paraît inatteignable. Pour d'autres configurations mélangées, ils pourront réussir à les résoudre, ce qui crée un point de comparaison. Chaque étudiant est invité à noter ses observations : par exemple le nombre de mouvements essayés, la façon dont les pièces se déplacent, ou toute **régularité** remarquée (certains pourraient remarquer que deux tuiles ne peuvent pas être simplement échangées sans perturber les autres).

- **Formulation d'hypothèses** : L'enseignant encourage la réflexion individuelle en posant des questions guidées pendant qu'il circule dans la classe : *« Qu'est-ce qui pourrait expliquer que*

certaines positions soient impossibles à résoudre ? », « Observez-vous une quantité qui reste inchangée quand on fait des mouvements ? », « Comment représenter mathématiquement un état du taquin ? ». Ces questions orientent les étudiants vers l'idée de modéliser un état du puzzle par une permutation des étiquettes 1 à 15 (et de la case vide). Un étudiant pourrait par exemple commencer à *numéroter les cases* de 1 à 16 (en traitant la case vide comme un 16ème élément) et à voir chaque déplacement comme un échange de la case vide avec une tuile. Peu à peu, certains émettent l'hypothèse qu'il existe un invariant, possiblement lié à la notion de *pair* ou *impair* (notion d'**invariant de parité**), sans forcément encore la formaliser complètement.

Pendant cette phase, l'enseignant reste attentif aux **erreurs possibles** ou aux fausses pistes. Par exemple, un étudiant pourrait penser qu'il suffira de suffisamment de mouvements aléatoires pour toujours finir par résoudre le taquin, sans imaginer qu'une configuration puisse être mathématiquement insoluble. L'enseignant dans ce cas confronte cette idée : *« Êtes-vous sûr que tous les mélanges se valent ? Comment prouveriez-vous qu'un arrangement est forcément atteignable ? »*. Un autre étudiant pourrait supposer qu'il manque juste « le bon algorithme » pour échanger 14 et 15. L'enseignant oriente alors : *« Si c'était possible, quel enchaînement de swaps cela représenterait-il sur les cases 14 et 15 ? Combien d'échanges minimum faudrait-il ? »*. Ce guidage vise à ce que l'étudiant réalise qu'un simple échange de deux tuiles correspond à une **transposition**, et qu'il n'arrive pas à le reproduire par des glissements sans entraîner d'autres changements. Chaque intervention de l'enseignant vise à stimuler la *formulation* par les étudiants de conjectures sourcées de leur expérimentation : par exemple *« J'ai l'impression qu'on ne peut jamais échanger deux pièces isolément, il y a toujours un désordre qui reste »* – ce qui est précisément ce que l'on souhaite qu'ils découvrent.

En fin de phase de recherche, idéalement, la plupart des étudiants auront soit résolu des configurations simples, soit constaté l'impasse sur la configuration de Loyd. Certains auront peut-être commencé à évoquer la notion de *parité* (par exemple en comptant le nombre de permutations inversées ou en parlant d'« échanges pair/impair »), d'autres auront simplement le constat empirique d'une impossibilité. Dans tous les cas, ils sont maintenant investis et prêts à confronter leurs idées avec les autres.

Phase 4 : Mise en commun – partage, discussion et validation (travail par groupe)

La classe se regroupe pour une **mise en commun** des découvertes. Selon l'organisation choisie, on peut d'abord faire discuter les étudiants *par petits groupes* pour qu'ils comparent leurs résultats individuels, puis orchestrer une discussion collective. Chaque groupe (ou quelques volontaires) présente ses conclusions :

- *Groupe 1* par exemple : « Nous avons réussi à résoudre une configuration mélangée au hasard, mais pas celle avec 14 et 15 inversés. On soupçonne que cette dernière est impossible à résoudre. »
- *Groupe 2* : « On a remarqué qu'on pouvait déplacer les pièces dans tous les sens, mais jamais on n'arrive à échanger uniquement deux tuiles sans que d'autres bougent aussi. »
- *Groupe 3* : « En réfléchissant, on a essayé de traduire les déplacements en termes d'échanges de positions. On a l'impression que certains échanges sont interdits par une forme de *parité*. »

L'enseignant écoute activement ces retours et valorise chaque contribution, corrigeant au besoin les imprécisions. Par exemple, si un groupe utilise le terme *parité* sans être sûr, l'enseignant leur demande d'expliquer : *« Qu'entendez-vous par parité ici ? »* – ce qui amène peut-être la notion de permutations paires/impaires. Si un groupe n'a qu'un constat empirique (« impossible mais on ne sait pas pourquoi »),

l'enseignant oriente la discussion pour qu'un autre groupe ou lui-même apporte un début d'explication théorique.

Progressivement, la classe converge vers l'idée clé : **il existe une propriété invariante lors des déplacements du taquin**. L'enseignant peut formaliser cette idée en s'appuyant sur les propos des étudiants : *« Ce que vous avez observé, c'est qu'un certain* invariant de parité *se conserve. En effet, on peut associer à chaque configuration une permutation des cases par rapport à l'état final. Chaque mouvement du taquin correspond à une opération particulière sur cette permutation. »* Il demande alors : *« À votre avis, un glissement correspond-il à une permutation paire ou impaire ? »*.

Pour valider et affiner la réponse, il peut s'appuyer sur un exemple concret au tableau : tracer un petit taquin 2×2 ou 3×3 et effectuer quelques mouvements en les traduisant en termes de permutation (par exemple, glisser une tuile d'une case vers la droite équivaut à échanger sa position avec celle du vide, donc réaliser une transposition impliquant le vide). Il guide ainsi les étudiants vers le fait que chaque mouvement élémentaire **modifie la permutation d'une certaine façon**. Dans le cas du taquin 4×4 complet, on peut mentionner (sans entrer dans tous les détails) qu'un mouvement équivaut en réalité à une permutation composée, souvent un cycle de longueur impaire (3, 5 ou 7) sur les tuiles [6], donc une permutation paire (car un cycle de longueur impaire se décompose en un nombre pair de transpositions) [7]. Autrement dit, *chaque glissement de tuile correspond à une permutation paire*. On ne peut obtenir par des suites de glissements que des **permutations paires** de l'ensemble des 16 cases [8]. L'échange direct de deux tuiles (une transposition impaire) est donc impossible à réaliser seul sur le taquin [8].

L'enseignant reformule avec l'accord de la classe la conclusion de la discussion : *« Vous avez mis en évidence que les configurations atteignables du taquin sont exactement celles qui correspondent à des permutations paires des pièces.* » En particulier, cela explique l'échec du défi de Sam Loyd : inverser uniquement 14 et 15 correspondait à une permutation impaire (une transposition), or le taquin ne permet que des permutations paires – d'où l'impossibilité de résoudre ce cas [9]. Cette découverte collective est ensuite **validée** par l'enseignant qui la relie au savoir mathématique établi : il confirme que, mathématiquement, *« les déplacements possibles du taquin forment un sous-ensemble du groupe symétrique, à savoir précisément le groupe des permutations paires*** » [8]. Il peut citer des chiffres marquants pour appuyer ce constat : il y a $16! = 20\,922\,789\,888\,000$ configurations possibles du taquin, et exactement la moitié d'entre elles (soit $10\,461\,394\,944\,000$) sont solubles – l'autre moitié est inatteignable, dont la fameuse configuration de Loyd [2]. Cette proportion 1/2 illustre bien que les positions se répartissent en deux classes égales : permutations paires vs. impaires.

Durant la discussion, l'enseignant rectifie d'éventuelles erreurs persistantes. Par exemple, si certains étudiants pensent encore que l'échec du défi vient d'une astuce de déplacement qu'ils n'auraient pas trouvée, il consolide l'idée que c'est **structurellement impossible** et non un manque d'essai : on a un argument invariantaire solide. De même, il veille à ce que la notion de permutation paire/impaire soit comprise de tous : il réexplique au besoin avec un exemple simple (une petite permutation sur 3 ou 4 éléments) comment déterminer sa parité en la décomposant en échanges de deux éléments. Cette phase se conclut lorsque toute la classe adhère à l'idée que *« quelque chose comme la parité se conserve »* et que seuls les réarrangements de type *pair* sont atteignables dans le jeu. Ils ont ainsi, par la discussion guidée, *validé* leurs conjectures initiales.

Phase 5 : Institutionnalisation – ramassage et reformulation (travail de classe)

Dans cette phase cruciale, l'enseignant **institutionnalise** les connaissances acquises en les reformulant dans le langage mathématique formel et en les connectant aux notions du cours. Après avoir ramassé éventuellement les fiches ou comptes-rendus des groupes (pour s'assurer des productions de chacun), il fait une synthèse au tableau.

Il introduit rigoureusement la notion de **groupe alterné** : *« On appelle groupe alterné de degré n, noté A_n, le sous-groupe du groupe symétrique S_n formé de toutes les permutations paires de n éléments. »* [10]. Il rappelle la **définition d'une permutation paire/impaire** de façon formelle, en s'appuyant sur ce qui a été dit en phase 4 : *« Une permutation est dite paire si elle peut se décomposer en un nombre pair de transpositions (échanges de deux éléments), et impaire si une telle décomposition nécessite un nombre impair de transpositions »* [11]. Il souligne que cette définition est bien posée (la parité ne dépend pas de la façon de décomposer la permutation, c'est un invariant arithmétique) [11]. À ce stade, il peut écrire un exemple au tableau : par exemple $\sigma = (1\ 3\ 2)$ est un cycle 3->1->2 qui se décompose en deux transpositions $(1\ 2)(1\ 3)$ et est donc une permutation paire, tandis que $\tau = (1\ 2)$ (la transposition simple échangeant 1 et 2) est évidemment impaire car c'est une seule transposition.

Ensuite, l'enseignant connecte explicitement cette notion avec le problème du taquin : *« Dans notre cas du taquin, nous avons 16 emplacements (15 tuiles + la case vide). Les mouvements autorisés forment tous des permutations paires de ces 16 objets. Donc l'ensemble des configurations accessibles correspond exactement au groupe alterné A_{16} (ou, si l'on considère uniquement les 15 tuiles en fixant la place du vide, au groupe alterné A_{15} avec la contrainte de la case vide). »* Il explique en des termes adaptés que **le taquin illustre le groupe alterné** : les déplacements possibles sont des éléments d'un groupe alterné, ce qui empêche notamment de réaliser une transposition isolée [3]. Il est bon de préciser que dans le cas général d'un taquin $n \times n$, il faut aussi prendre en compte la position de la case vide (parité de la case vide évoquée en phase 4), mais dans la configuration de Loyd la case vide ne bouge pas de coin, ce qui simplifie l'analyse en se concentrant sur la parité de la permutation des tuiles [12].

L'enseignant formalise ainsi le **résultat mathématique général** que les étudiants viennent de découvrir empiriquement : *« Le taquin ne permet que des permutations paires; le sous-groupe des permutations paires est précisément le groupe alterné A_n. »* Il peut mentionner quelques propriétés pour élargir la culture mathématique : par exemple, le fait que A_n est d'**indice 2** dans S_n et contient exactement la moitié des éléments de S_n [2], ou encore que pour $n \geq 5$, A_n est un groupe **simple** (non fractionnable en sous-groupes non triviaux) – bien que ce dernier point dépasse le niveau de la séance, c'est l'occasion de montrer que ce puzzle mène à des mathématiques profondes (Abel et l'insolvabilité générale des équations de degré ≥5, etc., peuvent être évoqués en anecdote). Plus près d'eux, on peut citer un autre casse-tête comme le Rubik's Cube qui possède lui aussi des restrictions de mouvement liées à des invariants de parité [3]. Ces exemples illustrent l'universalité de la notion découverte : *« La structure du groupe alterné apparaît dans de nombreux jeux et problèmes »*.

Enfin, l'enseignant **reformule les apprentissages visés** pour clore cette phase d'institutionnalisation : - Sur le plan *théorique*, les étudiants ont appris ce qu'est le groupe alterné A_n (sous-groupe des permutations paires) et comment distinguer permutations paires et impaires. - Sur le plan *pratique*, ils ont découvert comment un invariant de parité peut expliquer l'impossibilité de certains mouvements dans un jeu concret. - Sur le plan *méthodologique*, ils ont vécu une démarche de recherche mathématique : formulation d'hypothèses, expérimentation, mise en commun, et validation par une preuve ou argument général.

Phase 6 : Réinvestissement, familiarisation et entraînement

Pour ancrer les connaissances et permettre aux étudiants de s'exercer, la séance se termine par des activités de **réinvestissement**. L'enseignant propose quelques exercices et situations d'entraînement liées aux notions abordées :

- **Exercice 1 – Parité d'une permutation :** On donne aux étudiants plusieurs permutations exprimées en notation deux-lignes ou en notation cycle, par exemple $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ (qui échange 1 ↦ 2 et 3 ↦ 4), ou $\tau = (1\ 3\ 2\ 4)$, etc. Pour chacune, les étudiants doivent déterminer si elle est paire ou impaire, et expliquer pourquoi. Ils peuvent appliquer les méthodes vues en cours : soit décomposer en transpositions, soit calculer la signature via le nombre d'inversions. L'objectif est de les familiariser avec le critère de parité sur des exemples concrets hors contexte du taquin.

- **Exercice 2 – Invariant de parité sur un mini-taquin :** On propose un petit taquin 2×2 (3 pièces + 1 vide) ou 3×2 (5 pièces + 1 vide) et on demande : *« Quelles configurations sont atteignables depuis l'état ordonné ? »*. Les étudiants doivent analyser ce mini-casse-tête en listant les permutations possibles des pièces et en identifiant lesquelles sont paires. Par exemple, sur un 2×2, on peut très vite constater que seules les permutations paires des 3 pièces numérotées sont réalisables (le vide occupant le 4e emplacement). Cet exercice fait réinvestir à plus petite échelle le raisonnement du taquin de Loyd, et les étudiants peuvent même tenter une démonstration exhaustive dans ce cas simple, renforçant leur compréhension.

- **Exercice 3 – Application au taquin général :** On formule en guise d'entraînement avancé une question ouverte : *« Comment décider si une configuration quelconque d'un taquin 4×4 est solvable ? »*. La réponse attendue est qu'il faut comparer la parité de la permutation des tuiles à la parité de la position du vide (pair/impair suivant la ligne du vide) [11] [13]. Même si cela a été discuté, on demande aux étudiants de rédiger un court paragraphe expliquant ce critère, pour vérifier leur assimilation. Ceux qui y parviennent démontrent qu'ils ont intégré non seulement le concept de permutation paire, mais aussi son utilisation concrète pour résoudre un problème. L'enseignant peut fournir un feedback détaillé, corrigeant les confusions éventuelles (par ex. distinguer clairement parité de la permutation et parité liée au déplacement du vide).

- **Ouverture ludique :** Si le temps le permet, on peut proposer en défi bonus de réinvestissement un lien avec un autre jeu : *« Savez-vous que sur le Rubik's Cube, il est également impossible d'échanger deux cubes de place sans toucher le reste ? »* [3]. Sans entrer dans les détails du Rubik's Cube, l'enseignant explique que c'est une conséquence du même principe de parité dans un groupe de mouvements (ici aussi un sous-groupe du groupe symétrique, en fait le groupe alterné pour certaines pièces). Cette ouverture permet aux étudiants de se familiariser avec l'idée que les concepts de groupe et d'invariants ont des applications variées.

Tout au long de cette phase de réinvestissement, l'enseignant circule et accompagne les étudiants. Il s'assure qu'ils appliquent correctement la notion de parité : par exemple, s'il voit un étudiant décomposer une permutation de manière inefficace, il lui rappelle la méthode du comptage d'inversions pour gagner du temps. Il encourage ceux en difficulté en reprenant un exemple traité ensemble (par ex. *« Rappelle-toi la permutation (1 2)(3 4) qu'on a vue : c'était deux transpositions, donc paire. Essaye de t'en servir pour ce nouvel exemple. »*). Pour les plus à l'aise, il propose éventuellement d'aller plus loin (démontrer que A_n est de cardinalité $n!/2$, ou que A_n est engendré par les 3-cycles [6], etc., afin de nourrir leur curiosité mathématique).

En fin de séance, un bilan rapide est fait : on rappelle comment, en deux heures, on est partis d'un jeu concret pour aboutir à une notion abstraite puissante. Les étudiants ont manipulé, conjecturé, prouvé (à leur niveau) et ainsi *construit le concept de groupe alterné*. L'enseignant peut féliciter le groupe pour avoir *découvert* par eux-mêmes pourquoi Sam Loyd « ne risquait pas de perdre ses 1 000 $ » [14], et insiste sur le fait que cette compréhension par l'action et la réflexion est un acquis qu'ils pourront réutiliser dans d'autres contextes mathématiques. La séance se conclut ainsi sur une note positive, ayant atteint les objectifs d'apprentissage fixés à chaque étape, et ayant activement engagé les étudiants dans l'introduction du groupe alterné à travers le jeu du taquin.

---

[1] [2] [9] [11] [12] [13] Taquin — Wikipédia
https://fr.wikipedia.org/wiki/Taquin

[3] [4] [5] [7] [10] Groupe alterné — Wikipédia
https://fr.wikipedia.org/wiki/Groupe_altern%C3%A9

[6] [8] agreg-maths.univ-rennes1.fr
https://agreg-maths.univ-rennes1.fr/documentation/docs/taquin.pdf

[14] Mathématiques pour l'informatique - CHAPITRE 7. Groupes
https://zanotti.univ-tln.fr/MD/MD-Groupes.html